DM n°1 : Suite de Fibonacci – Corrigé

Exercice 1. On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1) Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.

$u_2 = u_0 + u_1 = 0 + 1 = 1$
$u_3 = 1 + 1 = 2$
$u_4 = 1 + 2 = 3$
$u_5 = 2 + 3 = 5$

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 2 \qquad u_{n+1} \geq \frac{3}{2} u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n : u_{n+1} \geq \frac{3}{2} u_n$$

Montrons par récurrence **double** que H_n est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

- Si $n = 2$, par la question 1), on a $u_3 = 3$ et $\frac{3}{2} u_2 = \frac{3}{2} \times 2 = 3$, si bien que $u_3 \geq \frac{3}{2} u_2$. Donc H_2 est vraie. **On vérifie de même que $u_4 \geq \frac{3}{2} u_3$, donc H_3 est vraie.**

- Soit un entier $n \geq 2$. On suppose que H_n et H_{n+1} sont vraies. Montrons H_{n+2}. On a

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= u_{n+2} + u_{n+1} \\ &\geq \frac{3}{2} u_{n+1} + \frac{3}{2} u_n \qquad \text{par } H_{n+1} \text{ et } H_n \\ &= \frac{3}{2} \left(u_{n+1} + u_n \right) \\ &= \frac{3}{2} u_{n+2} \end{aligned}$$

  donc H_{n+2} est vraie.

- Finalement, $\boxed{u_{n+1} \geq \frac{3}{2} u_n \text{ pour tout entier } n \geq 2.}$

3) On considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

a) Déterminer v_0 et v_1.

$v_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \times 1 = 0$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_{n+2} - v_{n+1} - v_n$.

On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{5}\,(v_{n+2} - v_{n+1} - v_n) &= \varphi^{n+2} - \psi^{n+2} - \varphi^{n+1} + \psi^{n+1} - \varphi^n + \psi^n \\ &= \varphi^n\left(\varphi^2 - \varphi - 1\right) - \psi^n\left(\psi^2 - \psi - 1\right)\end{aligned}$$

Or,

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+5+2\sqrt{5}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

et

$$\psi^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+5-2\sqrt{5}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \psi$$

Ainsi,

$$\sqrt{5}\,(v_{n+2} - v_{n+1} - v_n) = \varphi^n \times 0 - \psi^n \times 0 = 0$$

Finalement,

$$\boxed{v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0}$$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = v_n$.

Les suites (u_n) et (v_n) suivent la même relation de récurrence à deux termes et ont les mêmes deux premiers termes :

$$u_0 = v_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_1 = v_1 = 1$$

On montrerait alors facilement par récurrence (double) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{u_n = v_n}$.

Remarque : Ainsi, la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Étonnament, le terme de droite est toujours un entier !